

11 класс.

1. Заметим, что $|b-a| < c, |c-b| < a, |a-c| < b$ и $\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} = \frac{(b-a)(c-b)(a-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$. Кроме того $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8abc$.

Поэтому $\frac{(b-a)(c-b)(a-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \left| \frac{(b-a)(c-b)(a-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \right| \leq \left| \frac{abc}{8abc} \right| = \frac{1}{8}$.

2. Т.к. $x^2 + 1 \geq 2x, y^2 + 1 \geq 2y, z^2 + 1 \geq 2z$, то $\frac{x^2 + y^2 + z^2 + 3}{2} \geq x + y + z$, и достаточно доказать неравенство $\frac{x^2 + y^2 + z^2 + 3}{2} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Его, учитывая что $xyz = 1$, можно переписать в виде $(x + y - z)^2 + 3 \geq \frac{4}{z}$.

Поскольку исходное неравенство симметричное, можно считать, что z — наименьшая из переменных. Тогда $x + y - z \geq 2\sqrt{xy} - z = \frac{2}{\sqrt{z}} - z > 0$. Поэтому достаточно доказать, что $\left(\frac{2}{\sqrt{z}} - z\right)^2 + 3 \geq \frac{4}{z}$, т.е. $z^2 + 3 \geq 4\sqrt{z}$.

Осталось воспользоваться неравенством между средними $z^2 + 3 = z^2 + 1 + 1 + 1 \geq 4\sqrt[4]{z^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 4\sqrt{z}$.

3. Ответ: (0;0).

Предположим, что $n \neq 0$. Поскольку $4 + \sqrt{3} > 1$ и $11 + 6\sqrt{3} > 1$, то n и m одного знака. Поскольку $(4 + \sqrt{3})^n = (11 + 6\sqrt{3})^m$, то и $(4 - \sqrt{3})^n = (11 - 6\sqrt{3})^m$. Но $4 - \sqrt{3} > 1$, а $11 - 6\sqrt{3} < 1$. Поэтому n и m разных знаков. Противоречие. Поэтому $n = 0$. Но тогда и $m = 0$.

4. Введём переменные $x = \frac{AB_1}{AC}$, $y = \frac{BC_1}{BA}$ и $z = \frac{CA_1}{CB}$.

По теореме Чевы $AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 = CB_1 \cdot AC_1 \cdot BA_1$, т.е. $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$.

По неравенству между средними: $\sqrt[3]{xyz} = \frac{\sqrt[3]{xyz} + \sqrt[3]{(1-x)(1-y)(1-z)}}{2} \leq \frac{\frac{x+y+z}{3} + \frac{(1-x)+(1-y)+(1-z)}{3}}{2} = \frac{1}{2}$, т.е. $xyz \leq \frac{1}{8}$.

Заметим теперь, что $\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC} - S_{AB_1C_1} - S_{A_1BC_1} - S_{A_1B_1C}}{S_{ABC}} = 1 - x(1-y) - y(1-z) - z(1-x) = (1-x)(1-y)(1-z) + xyz = 2xyz \leq \frac{1}{4}$.

5. Ответ: Нельзя.

Предположим, что лист удалось перекрасить нужным способом.

Отметим клетки, как показано на рисунке.

Как бы ни располагался квадрат 3×3 или 4×4 , в нём находится чётное число отмеченных клеток. Поэтому при каждом ходе чётность числа отмеченных чёрных клеток не меняется.

Сначала число таких клеток равнялось нулю — было чётным. Поэтому, после любого числа ходов, число таких клеток не может равняться 15 — нечётному числу. Следовательно, получить закрашенный прямоугольник 4×6 невозможно.

