

Областное управление образования и науки
Областной институт последипломного педагогического образования
Отдел математики

III этап (областной)
Всеукраинской ученической олимпиады по математике

30 января 2010 г.

8 класс

1. Все чётные натуральные числа от 2 до 2008 выписали одно за другим: 2, 4, 6, 8, ..., 2006, 2008. Найдите количество цифр у полученного числа.
2. Найдите хотя бы одно решение ребуса

$$\text{МАТЕ} + \text{МАТИ} - \text{КА} = 2009,$$

где МАТЕ и МАТИ — четырёхцифровые числа, а КА — двухцифровое число. Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, а разные буквы обозначают разные цифры. Ответ обоснуйте.

3. Али-Баба и каждый из 40 разбойников нашли по одинаковому числу кувшинов (по крайней мере по два кувшина) и обнаружили на дне каждого из кувшинов одинаковое количество золотых монет (по крайней мере по две монеты). Узнав общее число найденных монет, жена Али-Бабы сразу догадалась, что кувшинов было 287. Сколько монет было во всех кувшинах?
4. Решите систему уравнений:

$$x^2 = x - y, \quad 2xy + y - z = x^2 + y^2, \quad (y - z)^2 = z - x.$$

5. Можно ли расставить в таблице 5×5 различные натуральные числа так, чтобы разность любых двух соседних была равна либо 4, либо 7? (Числа в таблице считаются соседними, если они стоят рядом в одной строке или в одном столбце. При вычислении разности из большего числа вычитается меньшее.)

КАЖДОЕ ЗАДАНИЕ ОЦЕНИВАЕТСЯ В 10 БАЛЛОВ.

На обложке работы укажите ФИО, школу, класс, полный домашний адрес с почтовым индексом, домашний телефон, ФИО учителя математики и ФИО учителя (преподавателя), который готовил Вас к олимпиаде.

Обласне управління освіти і науки
Обласний інститут післядипломної педагогічної освіти
Відділ математики

III етап (обласний)
Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

30 січня 2010 р.

8 клас

1. Усі парні натуральні числа від 2 до 2008 виписали одне за одним: 2, 4, 6, 8, ..., 2006, 2008. Знайдіть кількість цифр у числі, що отримали.
2. Знайдіть хоча б один розв'язок ребусу

$$\text{МАТЕ} + \text{МАТИ} - \text{КА} = 2009,$$

де МАТЕ і МАТИ — чотирицифрові числа, а КА — двоцифрове число. Однакові букви позначають однакові цифри, а різні букви позначають різні цифри. Відповідь обґрунтуйте.

3. Алі-Баба та кожен з 40 розбійників знайшли однакову кількість глеків (принаймні по два глеки) та виявили на дні кожного з глеків однакову кількість золотих монет (принаймні по дві монети). Дізнавшись загальну кількість знайдених монет, дружина Алі-Баби одразу здогадалась, що глеків було 287. Скільки монет було у всіх глеках?
4. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$x^2 = x - y, \quad 2xy + y - z = x^2 + y^2, \quad (y - z)^2 = z - x.$$

5. Чи можна розставити у таблиці 5×5 різні натуральні числа таким чином, щоб різниця будь-яких двох сусідніх дорівнювала або 4, або 7? (Числа у таблиці вважаються сусідніми, якщо вони стоять поруч в одному рядку чи в одному стовпці. При обчисленні різниці від більшого числа віднімається менше.)

КОЖНЕ ЗАВДАННЯ ОЦІНЮЄТЬСЯ В 10 БАЛІВ.

На обкладинці роботи вкажіть ПІБ, школу, клас, повну домашню адресу з поштовим індексом, домашній телефон, ПІБ вчителя математики і ПІБ вчителя (викладача), який готував Вас до олімпіади.

Областное управление образования и науки
Областной институт последипломного педагогического образования
Отдел математики

III этап (областной)
Всеукраинской ученической олимпиады по математике

30 января 2010 г.

9 класс

1. Футбольная команда «Шахтёр» принимает участие в групповом турнире кубка УЕФА. Группа состоит из пяти команд. Каждая команда играет с каждой ровно один раз. За победу в матче насчитывается 3 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков. После окончания группового турнира три команды, набравшие наибольшее число очков, выходят в следующий этап кубка. Какое наименьшее количество очков нужно набрать команде «Шахтёр», чтобы она наверняка вышла в следующий этап? Ответ обоснуйте.

2. Решите систему уравнений:

$$x^4 = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}, \quad y^4 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2}, \quad z^4 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}.$$

3. Докажите, что при всех действительных $a, b, c > 0$ выполняется неравенство:

$$(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \geq (ab+S)(bc+S)(ac+S).$$

Здесь $S = ab + bc + ac$.

4. Найдите все многочлены $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ с целыми коэффициентами a, b, c и d такие, что $p(x)$ кратно 8 при любых натуральных значениях x . Ответ обоснуйте.
5. На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC отмечены точки D и E такие, что $AD \perp BC$ и $AD = DE$. На стороне AC отмечена точка F такая, что $EF \perp BC$. Найдите угол ABF .

КАЖДОЕ ЗАДАНИЕ ОЦЕНИВАЕТСЯ В 10 БАЛЛОВ.

На обложке работы укажите ФИО, школу, класс, полный домашний адрес с почтовым индексом, домашний телефон, ФИО учителя математики и ФИО учителя (преподавателя), который готовил Вас к олимпиаде.

Обласне управління освіти і науки
Обласний інститут післядипломної педагогічної освіти
Відділ математики

III етап (обласний)
Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

30 січня 2010 р.

9 клас

1. Футбольна команда «Шахтар» бере участь у груповому турнірі кубку УЄФА. Група складається з п'яти команд. Кожна команда грає з кожною рівно один раз. За перемогу в матчі нараховується 3 очки, за нічию 1 очко, за поразку 0 очків. По закінченні групового турніру три команди, які набрали найбільшу кількість очок, виходять до наступного етапу кубка. Яку найменшу кількість очок треба набрати команді «Шахтар», щоби вона напевно вийшла до наступного етапу? Відповідь обґрунтуйте.

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$x^4 = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}, \quad y^4 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2}, \quad z^4 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}.$$

3. Доведіть, що при всіх дійсних $a, b, c > 0$ справджується нерівність:

$$(a + b)^2(b + c)^2(c + a)^2 \geq (ab + S)(bc + S)(ac + S).$$

Тут $S = ab + bc + ac$.

4. Знайдіть усі многочлени $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ з цілими коефіцієнтами a, b, c і d такі, що $p(x)$ кратне 8 при будь-яких натуральних значеннях x . Відповідь обґрунтуйте.
5. На гіпотенузі BC прямокутного трикутника ABC відмічені точки D і E такі, що $AD \perp BC$ та $AD = DE$. На стороні AC відмічена точка F така, що $EF \perp BC$. Знайдіть кут ABF .

КОЖНЕ ЗАВДАННЯ ОЦІНЮЄТЬСЯ В 10 БАЛІВ.

На обкладинці роботи вкажіть ПІБ, школу, клас, повну домашню адресу з поштовим індексом, домашній телефон, ПІБ вчителя математики і ПІБ вчителя (викладача), який готував Вас до олімпіади.

УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ (8 КЛАСС)

1. *Ответ:* 3464.

2. *Ответ:* например, $M = 1$, $A = 0$, $T = 2$, $E = 3$, $I = 6$, $K = 4$.

Проверка: $1023 + 1026 - 40 = 2009$.

3. Пусть каждый разбойник нашёл $\frac{287}{41} = 7$ кувшинов, в каждом из которых было n монет. Если бы каждый разбойник нашёл n кувшинов, в каждом из которых было 7 монет, то общее число найденных монет было бы таким же, но было бы $41n$ кувшинов. Поэтому при $n \neq 7$ число кувшинов нельзя однозначно определить, зная лишь число монет и количество разбойников. При $n = 7$ условие задачи выполняется, и общее число монет $287 \cdot 7 = 2009$.

Ответ: 2009 монет.

4. Перепишем второе уравнение в виде $(x - y)^2 = y - z$ и просуммируем все три уравнения. Получим: $x^2 + (x - y)^2 + (y - z)^2 = x - y + y - z + z - x = 0$. Отсюда $x = y = z = 0$.

Ответ: $x = y = z = 0$.

5. *Ответ:* можно.

Например:

1	5	9	13	17
8	12	16	20	24
15	19	23	27	31
22	26	30	34	38
29	33	37	41	45

УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ (9 КЛАСС)

1. Ответ: 8 очков.

Покажем, что не может быть так, что больше трёх команд наберут 8 или более очков. Действительно, за одну игру команды в сумме набирают не более 3 очков, а всего в турнире играется $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ игр. То есть за весь турнир все команды вместе могут набрать не более 30 очков. Но если хотя бы 4 команды набрали бы 8 или более очков, то они все вместе набрали бы не менее $4 \cdot 8 = 32$ очков. Противоречие. Таким образом, если «Шахтёр» наберёт 8 или более очков, то он наверняка выйдет в следующий этап.

Таблица 1

	1	2	3	4	5
1	×	3	3	1	0
2	0	×	3	3	1
3	0	0	×	0	0
4	1	0	3	×	3
5	3	1	3	0	×

Таблица 2

	1	2	3	4	5
1	×	*	*	*	*
2	*	×	3	3	0
3	*	0	×	3	3
4	*	0	0	×	0
5	*	3	0	3	×

Покажем, что меньше 8 очков недостаточно для того, чтобы выйти в следующий этап. Если «Шахтёр» (команда 1) наберёт 7 очков, то ещё 3 команды (2, 4 и 5) могут набрать по 7 очков (таблица 1). Если же «Шахтёр» (команда 1) наберёт не более 6 очков, то ещё три команды (2, 3 и 5) могут набрать по 6 очков в матчах без участия «Шахтёра» (таблица 2). С учётом очков, набранных в матчах с «Шахтёром», каждая из этих команд наберёт не меньше 6 очков. Таким образом, если «Шахтёр» наберёт не более 7 очков, то по крайней мере три другие команды могут набрать очков не меньше, чем «Шахтёр». А это не гарантирует «Шахтёру» выход в следующий этап кубка УЕФА без жеребьёвки.

2. Освободившись от знаменателей и просуммировав уравнения, после преобразований получаем: $(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 y^2 z^2 - 2) = 0$. Отсюда получаем, что $x^2 y^2 z^2 = 2$, а, значит, $2x^2 = y^2 + z^2$, $2y^2 = x^2 + z^2$, $2z^2 = x^2 + y^2$. Отсюда $x^2 = y^2 = z^2$. Следовательно, $x^6 = y^6 = z^6 = 2$.

Ответ: $x = y = z = \pm \sqrt[6]{2}$ (всевозможные варианты знаков).

3. Легко проверить справедливость неравенств $(a^2 + S)(b^2 + S) \geq (ab + S)^2$, $(a^2 + S)(c^2 + S) \geq (ac + S)^2$, $(b^2 + S)(c^2 + S) \geq (bc + S)^2$. Перемножая эти неравенства, получим:

$$(a^2 + S)^2(b^2 + S)^2(c^2 + S)^2 \geq (ab + S)^2(bc + S)^2(ac + S)^2.$$

Отсюда $(a^2 + S)(b^2 + S)(c^2 + S) \geq (ab + S)(bc + S)(ac + S)$. Т. е. $(a + b)^2(a + c)^2(b + c)^2 \geq (ab + S)(bc + S)(ac + S)$.

4. *Ответ:* d кратно 8, a, b, c кратны 4, $a + b + c$ кратно 8.

При $x = 8$ имеем: $p(8) = a \cdot 8^3 + b \cdot 8^2 + c \cdot 8 + d$ кратно 8. Отсюда d кратно 8. При $x = 1$ получим, что $p(1) = a + b + c + d$ кратно 8, а т. к. d кратно 8, то $a + b + c$ тоже кратно 8. Подставим $x = 7$. Получим:

$$\begin{aligned} p(7) &= a \cdot 7^3 + b \cdot 7^2 + c \cdot 7 + d \equiv a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d \equiv \\ &\equiv -a + b - c + d \equiv -a + b - c \pmod{8}. \end{aligned}$$

Поэтому $-a + b - c$ кратно 8. Т. е. $a + b + c$ и $-a + b - c$ кратны 8. Поэтому их сумма и разность, т. е. $2b$ и $2(a + c)$, кратны 8; отсюда b и $a + c$ кратны 4. Наконец, при $x = 2$ получим: $p(2) = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 8a + 4b + 2c + d$ кратно 8. Т. к. d и $4b$ кратны 8, то $8a + 2c$ кратно 8, а $4a + c$ кратно 4. Таким образом, $a + c$ и $4a + c$ кратны 4. Их разность, т. е. $3a$, кратна 4. Поэтому a кратно 4. Отсюда c тоже кратно 4.

Покажем, что если условия на a, b, c, d выполнены, то $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ кратно 8 при всех натуральных x . Имеем:

$$p(x) = a(x^3 - x) + b(x^2 - x) + (a + b + c)x + d.$$

Числа $x^3 - x$ и $x^2 - x$ чётные. Поэтому $p(x)$ кратно 8.

5. По условию, треугольник ADE — равнобедренный прямоугольный. Следовательно, $\angle DEA = 45^\circ$. Заметим, что четырёхугольник $ABEF$ — вписанный, поскольку в нём два противоположных угла прямые. Тогда $\angle ABF = \angle AEF = 90^\circ - \angle DEA = 45^\circ$.

Ответ: $\angle ABF = 45^\circ$.