

10 класс.

1. Заметим, что $|b-a| < c, |c-b| < a, |a-c| < b$ и $\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} = \frac{(b-a)(c-b)(a-c)}{abc}$.

Поэтому $\frac{(b-a)(c-b)(a-c)}{abc} \leq \left| \frac{(b-a)(c-b)(a-c)}{abc} \right| < \left| \frac{abc}{abc} \right| = 1$.

2. Поскольку неравенство симметричное, можно считать, что z — наибольшая из переменных. Перепишем неравенство в виде: $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 + 3 \geq 4z$ (учитывая, что $xyz = 1$). Поскольку z наибольшая из переменных, то $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} - \frac{1}{z} = 2\sqrt{z} - \frac{1}{z} > 0$. Поэтому достаточно

доказать, что $\left(2\sqrt{z} - \frac{1}{z}\right)^2 + 3 \geq 4z$, т.е. $\frac{1}{z^2} + 3 \geq \frac{4}{\sqrt{z}}$.

Осталось воспользоваться неравенством между средними $\frac{1}{z^2} + 3 = \frac{1}{z^2} + 1 + 1 + 1 \geq 4\sqrt{\frac{1}{z^2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{4}{\sqrt{z}}$.

3. Ответ: (0;0).

Поскольку $\left(5 + 3\sqrt{2}\right)^n = \left(7 + 4\sqrt{2}\right)^m$, то и $\left(5 - 3\sqrt{2}\right)^n = \left(7 - 4\sqrt{2}\right)^m$.

Поэтому $\left(5 + 3\sqrt{2}\right)^n \left(5 - 3\sqrt{2}\right)^n = \left(7 + 4\sqrt{2}\right)^m \left(7 - 4\sqrt{2}\right)^m$, т.е. $7^n = 17^m$, а это возможно только при $n = m = 0$.

4. Введём переменные $x = \frac{AB_1}{AC}$, $y = \frac{BC_1}{BA}$ и $z = \frac{CA_1}{CB}$.

По теореме Чебы $AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 = CB_1 \cdot AC_1 \cdot BA_1$, т.е. $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$.

По неравенству между средними: $\sqrt[3]{xyz} = \frac{\sqrt[3]{xyz} + \sqrt[3]{(1-x)(1-y)(1-z)}}{2} \leq \frac{\frac{x+y+z}{3} + \frac{(1-x)+(1-y)+(1-z)}{3}}{2} = \frac{1}{2}$, т.е. $xyz \leq \frac{1}{8}$.

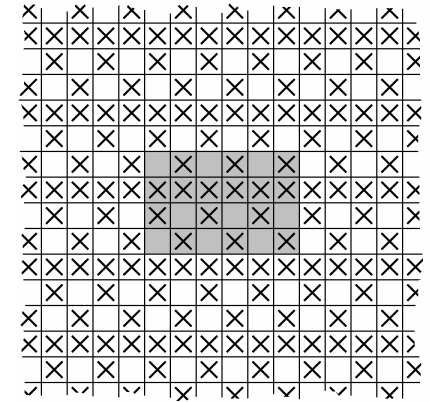
Заметим теперь, что $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC} - S_{AB_1C_1} - S_{A_1BC_1} - S_{A_1B_1C}}{S_{ABC}} = 1 - x(1-y) - y(1-z) - z(1-x) = (1-x)(1-y)(1-z) + xyz = 2xyz \leq \frac{1}{4}$.

5. Ответ: Нельзя.

Предположим, что лист удалось перекрасить нужным способом.

Отметим клетки, как показано на рисунке.

Как бы ни располагался квадрат 3×3 или 4×4 , в нём находится чётное число



отмеченных клеток. Поэтому при каждом ходе чётность числа отмеченных чёрных клеток не меняется.

Сначала число таких клеток равнялось нулю — было чётным. Поэтому, после любого числа ходов, число таких клеток не может равняться 15 — нечётному числу. Следовательно, получить закрашенный прямоугольник 4×6 невозможно.